2020/11/18.

Groupe 3.

TD 4.

EX4: Règle de l'Hospital.

① $\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{2+x}$ $f(x)$ $g(x)$

$\lim_{x\to\infty} 1+\sqrt{x} = +\infty$

$\lim_{x\to\infty} 2+x = +\infty$

$\frac{\infty}{\infty}$

On a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(x) = 1$, donc par la règle de l'Hospital.

on a $\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}$

$= \frac{0}{1} = 0$

② $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x\sqrt{2x}-2x}$, $\lim_{x\to 2} x^2-4 = 0$

$\lim_{x\to 2} x\sqrt{2x} - 2x = 2\times\sqrt{4} - 4 = 0$

Il s'agit d'une forme indéterminée: $\frac{0}{0}$.

On pose $f(x) = x^2-4$. $g(x) = x\sqrt{2x} - 2x = \sqrt{2}\, x^{\frac{3}{2}} - 2x$

donc $f'(x) = 2x$. $g'(x) = \sqrt{2}\times\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 2$

donc d'après la règle....

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x\sqrt{2x}-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{\sqrt{2}\times\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2} = \frac{2\times 2}{3-2}$

$= \frac{4}{1} = 4$

EX5. ① $\begin{cases} Q(P) = 0 & \text{si } P < 5 \\ Q(P) = 100P-300 & \text{si } P \geq 5 \end{cases}$

La fonction $Q(P)$ est continue sur $[0,5[$,

$Q(P)$ est continue sur $[5, +\infty[$

On étudie la continuité au point $P=5$.

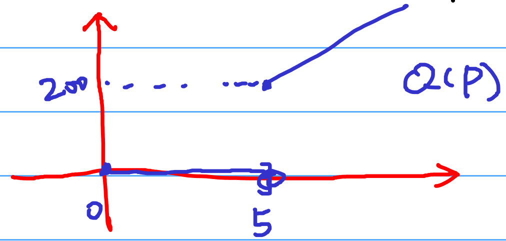
On a $Q(5) = 100\times 5 - 300 = 200$

$\lim_{P\to 5^-} Q(P) = 0 \neq 200$, donc $Q(P)$ n'est pas continue à gauche en $P=5$

$\lim_{P\to 5^+} Q(P) = \lim_{P\to 5^+} (100P-300) = 200 = Q(5)$, donc $Q(P)$

est continue à droite en $p=5$.

Donc, $Q(p)$ n'est pas continue en $p=5$.



$Q(p)=0$ pour $p\in[0,5[$

$Q(p)\geq 200$ pour $p\in[5,+\infty[$.

$Q(p)$ ne peut pas prendre de valeurs dans $]0,200[$.

Ex6: (Idée: la quantité conjugué)

$$\lim_{x\to 0} H(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

$$(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1) = (\sqrt{1+x^2})^2 - 1^2 = 1+x^2-1 = x^2$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{\sqrt{1}+1} = 0$$

On peut prolonger $H(x)$ par continuité en $x=0$, en posant $H(0)=0$

TD5:

Ex1: ① Vrai ② Vrai ③ Vrai

④ Faux, exemple: $g(x) = \lambda \exp(x)$

$g'(x) = \lambda \exp(x) = g(x)$

⑤ Faux. $\forall x>0 \quad \exp(\ln(x)) = x$

DS: Ex5 : l'ensemble de def.

① $f_1(x) = x^7 - 3x^4$. $\quad D_f = \mathbb{R}$

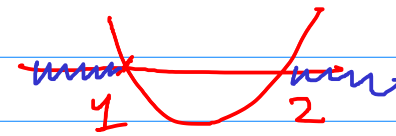
② $f_2(x) = x^7 - 3\sqrt{x}$ $\quad D_f = [0,+\infty[$ $\quad \sqrt{x}$ $(x\geq 0)$

③ $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \iff (x-1)(x-2) \geq 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$

$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ $\quad$ $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$



$]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

Donc. $D_f =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

④ $f_4(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

$x^2 - 1 = 0 \iff x = 1$ ou -1.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

TD5: Ex2:

① $f(x) = (2x+3)\ln(x+7)$ est définie pour $x + 7 > 0$

Donc $x > -7$,

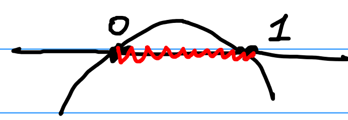
$D_f =]-7, +\infty[$

② $g(x) = 7 + \ln(x^2+3)$

$x^2 + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. donc $D_f = \mathbb{R}$.

③ $h(x) = -8x + \ln(x - x^2)$

$x - x^2 > 0 \iff x(1-x) > 0$

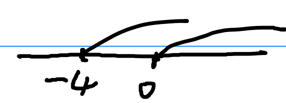


Donc $D_f =]0, 1[$

Ex3: ① $\ln(x+4) = 2\ln x$ a sens pour $x + 4 > 0$ et $x > 0$

$x > -4$ $\quad$ $x > 0$

donc



$\boxed{x > 0}$

En prenant l'exp des deux côtés, on a

$\exp^{\ln(x+4)} = \exp^{2\ln x} = \exp^{\ln x^2}$

$\Rightarrow \quad x+4 = x^2$

On résoud $x^2 - x - 4 = 0$, $a=1$ $b=-1$, $c=-4$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 1+16 = 17$

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$, $\underbrace{x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} < 0}$

la seule sol est $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

② $\ln(x+8) = 4$

$x+8 > 0 \Rightarrow x > -8$

$\Rightarrow \exp^{\ln(x+8)} = \exp(4) = e^4$

$\Rightarrow x+8 = e^4 \Rightarrow x = e^4 - 8 > -8$

Donc la sol est $x = e^4 - 8$

③ $\underline{2(\ln x)^2 + 3\ln x - 2 = 0}$ $x > 0$.

On change de variable. On pose $X = \ln x$

On obtient $\underline{2X^2 + 3X - 2 = 0}$, $a=2$, $b=3$, $c=-2$

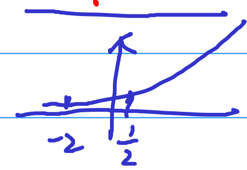
$\Delta = 3^2 - 4 \times (2) \times (-2) = 9+16 = 25$

$\Rightarrow X_1 = \dfrac{-3+\sqrt{\Delta}}{4} = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$ $X_2 = \dfrac{-3-\sqrt{\Delta}}{4} = -2$

On a posé $X = \ln x$

$\Rightarrow \exp X = x$

$\Rightarrow x_1 = \exp X_1 = \underline{\exp\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0}$, $x_2 = \underline{\exp(-2)} > 0$



④ $2e^{3x} = 17$

$\Rightarrow e^{3x} = \dfrac{17}{2}$

$\Rightarrow \ln e^{3x} = \ln \dfrac{17}{2} \Rightarrow 3x = \ln\left(\dfrac{17}{2}\right) \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{17}{2}\right)$

⑤ $3^x = 12$

$\parallel$

$\exp^{\ln(3^x)} = \exp^{x\ln 3}$

$\Rightarrow \exp^{x\ln 3} = 12$

En appliquant ln des deux côtés, on a $x\ln 3 = \ln 12$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 12}{\ln 3}$

DS : Ex6 : (Variation d'une fonction).

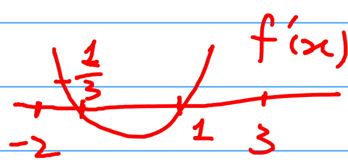
$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ sur $[-2, 3]$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ ✓ 0.5'

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$

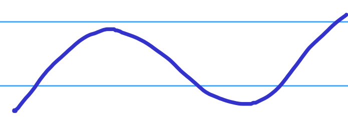
$\Rightarrow x_1 = \frac{2-\sqrt{16}}{2\times 3} = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$. ✓ $x_2 = \frac{2+\sqrt{16}}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$ ✓ 1.5'

2'



	-2		$-\frac{1}{3}$		1		3
$f'(x)$		+		−		+	
$f(x)$	$\square$	↗	$\square$	↘	$\square$	↗	$\square$

✓ 3'



0.5'

Ex4 : ① $f(x) = 3x - 2\ln(1+x)$, est définie pour $1+x > 0$

donc $x > -1$

Elle est dérivable sur $]-1, +\infty[$,

et $f'(x) = 3 - 2\times\frac{1}{1+x} = \frac{3\times(1+x)}{1+x} - \frac{2}{1+x} = \frac{3x+1}{1+x}$

La signe de $f'(x)$ est celui de $1+3x$ car $1+x > 0$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ le tableau :

x	-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−		+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-\frac{1}{3})$	↗	$+\infty$

$f(-\frac{1}{3}) = 3\times(-\frac{1}{3}) - 2\ln(1-\frac{1}{3})$
$= -1 - 2\ln(\frac{2}{3})$

② $g(x) = e^{2x} - 5x$, $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

$g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. $g'(x) = e^{2x} \times 2 - 5$

On a $\underline{g'(x) = 2e^{2x} - 5 \geq 0} \Leftrightarrow e^{2x} \geq \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \ln e^{2x} \geq \ln \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 2x \geq \ln \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$

Donc. $g(x) \nearrow$ pour $x \geq \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$

$\searrow$ pour $x \leq \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$

le tableau :

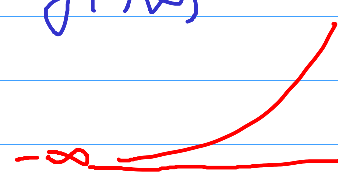
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}(1 - \ln(\frac{5}{2}))$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 5x$ $g(-\infty) =$

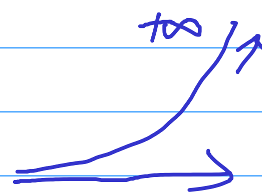
$g(+\infty)$

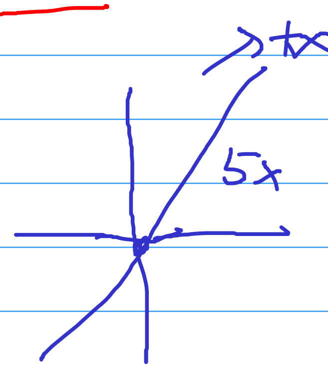
$= 0 - (-\infty)$

$= +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{e^{2x}}_{+\infty} - \underbrace{5x}_{+\infty}$





$= +\infty$

$g\left(\frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)\right)$

$= e^{2 \times \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)} - 5 \times \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$

$$= e^{(\ln 5 - \ln 2)} - \frac{5}{2}(\ln 5 - \ln 2)$$

$$= e^{\ln(\frac{5}{2})} - \frac{5}{2}(\ln \frac{5}{2})$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2}(\ln(\frac{5}{2})) = \left[1 - \ln(\frac{5}{2})\right] \times \frac{5}{2}$$